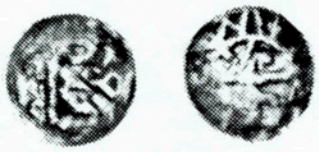
LÀMINA XXX. INCERTES D'EPOCA COMTAL

INCERTES



tipus 1 A 1

tipus 2 A 1

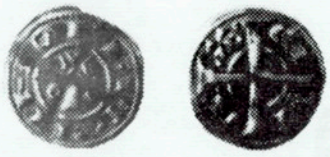
2 A 2

tipus 3 A 1

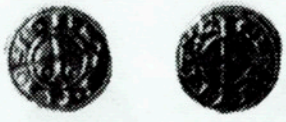
LÀMINA XXXI. REIALS

ALFONS I

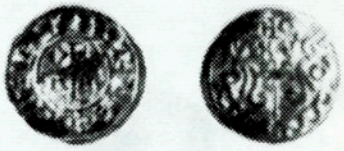
Catalunya



1 A 1



2 A 1



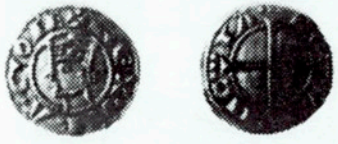
3 A 1

Provença

4 A 1

5 A 1

4/6 A 1



6 A 1

7 A 1

Aragó

8 A 1

9 A 1

LÀMINA XXXII. REIALS

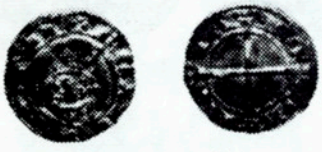
PERE I

Catalunya

10 A 1

11 A 1

Provença



12 A 1

12 B 1

13 A 1

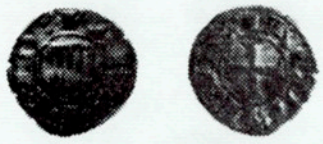
Aragó

14 A 1

15 A 1

JAUME I

Catalunya

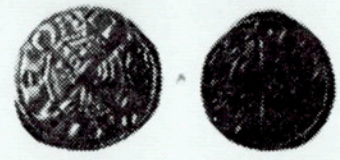


16 A 1

16 B 1

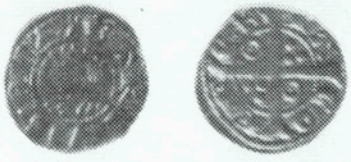
17 A 1

17 B 1



18 A 1

19 A 1



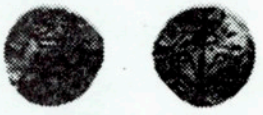
20 A 1

21 A 1

Valencia

22 A 1

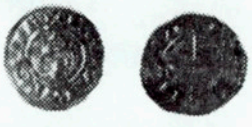
23 A 1



24 A 1

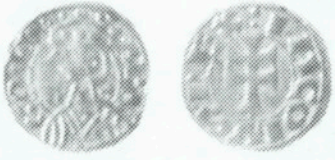
Provença

25 B 1

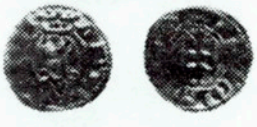


26 A 1

Aragó



27 A 1

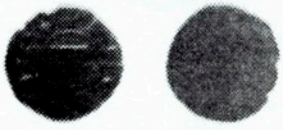


28 A 1.

LÀMINA XXXIV. COMTALS I REIALS

RAMON BERENGUER V de PROVENÇA

29 A 1



30 B 1

Les monedes d'un nou temps:

JAUME I

1 GROS

PERE II

3 DINERAL

4 DINERAL D'OR

SECCION III

EL COEFICIENTE ENTRE EL NUMERO DE EJEMPLARES Y EL NUMERO DE CUÑOS; ALCANCE DE SU CONTENIDO DE INFORMACION ESTADISTICA

por Francisco Javier Mora Mas

INDICE

1. Introducción y finalidad
2. Fundamento analítico
3. Efecto de la antigüedad
4. Contenido estadístico del coeficiente
5. Algunas aplicaciones ilustrativas

ANEXOS

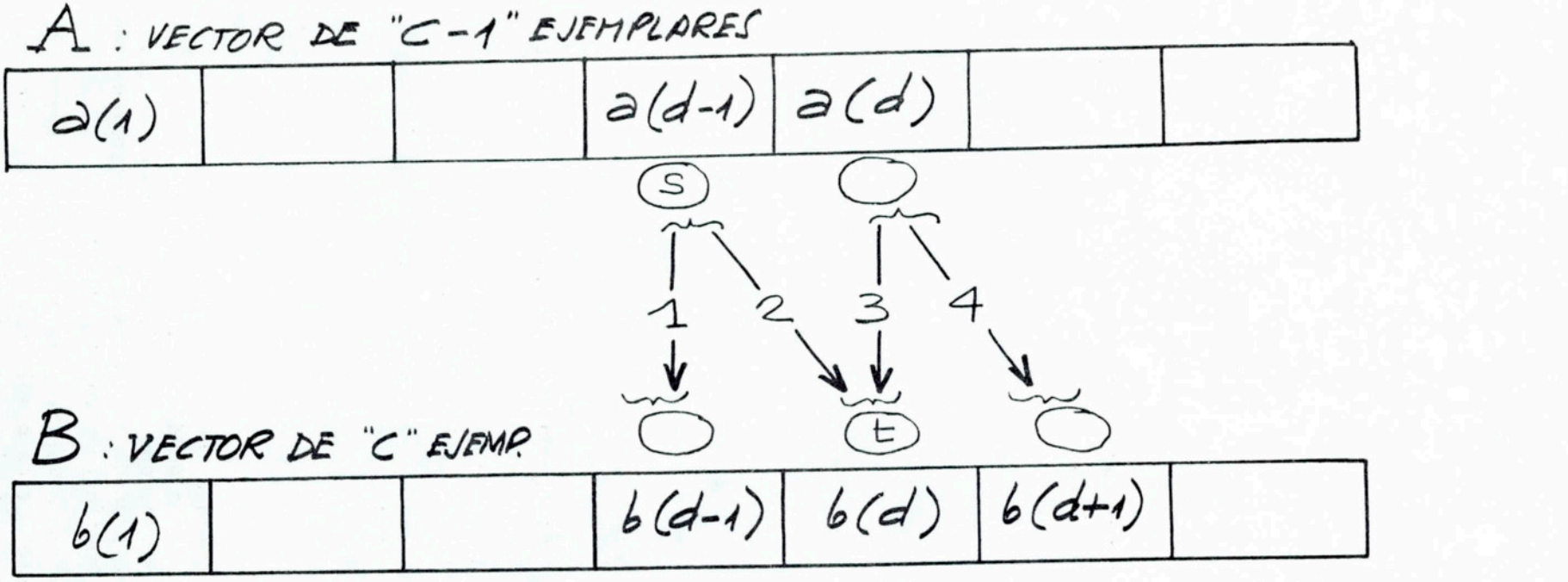
1. Probabilidad que en una muestra resulte un determinado valor para el coeficiente ejemplares por cuño.
2. Tablas I/VII.- Campo de variación del "coeficiente ejemplares porcuño". "r"; número original de cuños, n = 5, 10, 15, 20, 25, 30 y 40.
3. Valor límite inferior del "coeficiente" para estimar que todos los cuños se hallan presentes en la muestra.
4. Referncias y notas.

* * *

1. INTRODUCCION Y FINALIDAD

Entre los estudios numismáticos que interesan sobre cualquier 'tesorillo' de monedas antiguas figura la tarea de distinguir la impronta de los diversos cuños, de anverso y de reverso, que se emplearon en la respectiva acuñación; casi sistemáticamente se procede al análisis y a la catalogación de los distintos cuños que se han manifestado en el hallazgo

Las monedas del hallazgo que son ejemplares de una misma acuñación se agrupan y, como si fuera una característica propia del 'tesorillo', se establece el valor de un indicador denominado 'coeficiente de ejemplares por cuño' (Villaronga); este 'coeficiente' es el coeficiente que resulta de dividir el número de ejemplares por el número de cuños distintos manifestados en aquéllos. Para designar el 'coeficiente' otros autores han empleado nom-



1) $a(d-1) \times \left(\frac{d-1}{n}\right)$

2) $a(d-1) \times \left(1 - \frac{d-1}{n}\right)$

3) $a(d) \times \left(\frac{d}{n}\right)$

4) $a(d) \times \left(1 - \frac{d}{n}\right)$

$$b(d) = a(d-1) \times \left(1 - \frac{d-1}{n}\right) + a(d) \times \frac{d}{n}$$

n : nro. original de cuñas

Figura nº 1

bres equivalentes, tales como 'relación' ("relationship specimens-dies", Crawford; "ratio coins-dies", Lyon) y 'valor índice' ("index figure", Robinson).

Obsérvese que el 'coeficiente ejemplares por cuños' es un valor que tiene parte de variabilidad aleatoria, debido a que la manifestación de un cuño concreto cualquiera en la muestra (conjunto de ejemplares en el hallazgo) está supeditado a las múltiples circunstancias del azar y también a la limitación del volumen de la muestra; sin embargo, el 'coeficiente' contiene también cierta parte de determinismo, pues es evidente que la menor o mayor cantidad de cuños originales empleados en la acuñación influye en la proporción de los distintos cuños identificados en el hallazgo; por lo tanto, ciertos valores del 'coeficiente' serán más probables que otros.

La finalidad de la presente comunicación es la de analizar el alcance determinístico del contenido de la información estadística del 'coeficiente' para su adecuada utilización.

2. FUNDAMENTO ANALITICO

La posibilidad de llevar a cabo el análisis es concomitante con la posibilidad de simular la formación aleatoria de las muestras, según el azar natural, y el consiguiente estudio de la variación probabilística del "coeficiente". Sin embargo, el análisis y la composición apriorística del fenómeno nos permite obtener la matemática que proporciona directamente el resultado final de una larga simulación. Podemos decir que el fundamento analítico de este trabajo se basa en la "simulación matemática apriorística".

El procedimiento de simulación matemática de la formación de las muestras se presentó en una comunicación anterior (ref. n°1) y resuelve el problema para toda acuñación y muestreo realizado bajo condiciones normales; consiste en ajustar adecuadamente un proceso estocástico markoviano. Recordamos que las condiciones normales aludidas son:

1) Que con cada cuño se haya acuñado una cantidad de monedas sensiblemente igual, 2) que la cantidad de monedas por cuño sea muy grande, y 3) que la formación de la muestra haya sido hecha al azar.

En la fig. 1 se representa en la parte superior el vector'A' de los elementos de la probabilidad total correspondiente a una muestra de ' c-1' ejemplares, cada elemento de probabilidad 'a(d)' nos da el valor de la probabilidad de que en la muestra haya 'd' cuños distintos; debajo se halla el vector 'B' correspondiente a la muestra con 'c' ejemplares, o sea con uno más que en el anterior. Mediante flechas se muestra cómo se divide un elemento de probabilidad del vector 'A', al añadir al azar otra moneda a la muestra, véase la clave 's' de la figura, y cómo luego se componen estas divisiones para pasar a constituir los elemntos de probabilidad del vector 'B', véase la clave 't'. Este mecanismo nospermite establecer una fórmula para el cálculo de la probabilidad de que nosresulte un determinado valor para el 'coeficiente', a partir de las probabilidades de la estructura de la muestra inmediata inferior en número de ejemplares; la fórmula se detalla en el anexo n°1. Así, pues, a partir de la muestra más pequeña, constituída por un sólo ejemplar, donde el único elemento de probabilidad es del 100 % para 1 cuño (los demás elementos son nulos), se puede calcular progresivamente los elementos de probabilidad de todo vector correspondiente a cualquier tamaño de muestra.

Con la aplicación de este procedimiento ha sido posible la preparación de las tablas que se muestran en el anexo n°2; cada tabla corresponde a un número 'n' que representa a la cantidad original de cuños empleados por la

ceca, y nos resume la actuación estadística del 'coeficiente' mediante tres valores para cada tamaño 'c'de la muestra:

r_{inf} : valor límite inferior,

r_{max} : valor más probable, y

r_{sup} : valor límite superior

Los valores límite se han establecido bajo la condición de que los eventuales otros valores más distanciados (por debajo del valor límite inferior o por encima del valor límite superior) no alcancen la suma de probabilidad del 5 % en cada extremo.

Por ejemplo, en el caso de suponer que la ceca haya empleado 40 cuños originales en la acuñación (véase la tabla del anexo n°2.7) y que la muestra contenga 20 monedas, se tiene la siguiente variación para el 'coeficiente':

- valor límite inferior, $r_{inf} = 20/18 = 1{,}111$
- valor más probable, $r_{max} = 20/16 = 1{,}250$
- valor límite superior, $r_{sup} = 20/13 = 1{,}538$

Concretamente, para este caso se tienen las siguientes probabilidades:

- prob $(r=r_{max})$ = 26,73 %
- prob $(r_{inf} \lessapprox r \leq r_{sup})$ = 95,76 %
- prob $(r \gtrsim r_{inf})$ = 1,18 %
- prob $(r \leq r_{sup})$ = 3,06 %

Con lo que se ha explicado tenemos resuelto el problema de determinar el campo de variación del 'coeficiente ejemplares por cuño', bajo supuesto de conocer el número total de los cuños originales empleados en la acuñación.

3. EFECTO DE LA ANTIGUEDAD

Cuando los ejemplares de una acuñación se lanzan a la circulación, no se hallan precisamente bajo unas constantes condiciones de conservación, como cuando las monedas se hallan guardadas en un museo; en la circulación ordinaria la misión de cada moneda es facilitar el desarrollo económico con la ampliación de las posibilidades de las transacciones comerciales. Esta misión implica la iterativa transferencia de los ejemplares de unas manos a otras, en representación de una transferencia de valor.

La acumulación del repetido cambio de mano de las monedas, que no poseen características selectivas, origina fenómenos aleatorios varios entre los que se pueden citar:

1. La pérdida de peso, o desgaste de los ejemplares,

2. La tendencia a la distribución aleatoria uniforme de los ejemplares en la zona de circulación, y

3. La eliminación o pérdida de ejemplares.

El desgaste provoca evidentemente una disminución de peso en cada moneda; cada disminución aislada es inapreciable, pero una vez acumuladas pueden sumar diferencias depeso detectables. La pérdida de peso del ejemplar es una variable aleatoria que depende, también, de la intensidad de la cir-

culación acumulada sobre el mismo ejemplar. Como consecuencia se tiene, al cabo de un tiempo,una disminución en el peso medio de los ejemplares del colectivo y un aumento de la dispersión del peso del ejemplar tomado al azar; ambas modificaciones paramétricas son tanto más significativas cuanto más prolongado haya sido el tiempo de circulación monetaria acumulado.

La circulación aleatoria natural de las monedas es semejante al movi - miento browniano de las partículas físicas y origina una tendencia a la distribución uniforme en toda una zona socio-económica, de manera, que todo cuño original tiene igual probabilidad que otro de la misma acuñación de identificarse en cualquier punto de la zona. Cabe, sin embargo, la disminución progresiva de la densidad de ejemplares por localidad o punto de la zona debido a la tendencia permanente de la ampliación de los límites de la zona, y de la aparición de nuevas acuñaciones; pero esta circunstancia no modifica la tendencia a la uniformidad del contenido aleatorio. Así, pues, el conjunto de monedas de una localidad, un lote cualquiera, cada fracción tomada al azar, etc. constituyen muestras aleatorias sujetas a la distribución uniforme original.

La pérdida de ejemplares a lo largo del tiempo, bajo la consideración de la hipótesis de no selectividad, no modifica la mencionada tendencia a la uniformidad; simplemente , cada extravío da lugar a una disminución de la densidad del número de ejemplares en el lugar correspondiente; este efecto se suma al de la ampliación de la zona circulatoria.

En conclusión, decimos que no corresponde la utilización simple del "coeficiente" observado en los hallazgos de monedas para situar la antigüedad de la formación de los mismos- En todo caso caben correlaciones indirectas debidas a otras causas.

4. CONTENIDO ESTADISTICO DEL "COEFICIENTE".

La estructura estadística de todo hallazgo de monedas antiguas, supuesto formado bajo las condiciones de normalidad, constituye simplemente un "punto estadístico" tomado al azar del volumen original de la emisión, independiente del tiempo que haya transcurrido. Asi pues, la estructura estadística formada por los cuños en la muestra depende sólo de dos parámetros: 1) del número "n" de cuños originales empleados en la acuñación y 2) del número "c" de ejemplares que componen la muestra, hallazgo o tesorillo.

La información que proporciona la propia muestra disminuye con la disminución del número de ejemplares, tanto es asi que cuando la muestra se reduce a un solo ejemplar la información sobre otras posibilidades es nula; en efecto no se puede hacer ninguna otra previsión con relación a otros posibles cuños.

Estimamos que se pueden iniciar investigaciones estadisticas con vaga precisión en los resultados cuando la muestra se compone de 5 a 10 ejemplares y se pueden dar resultados bastante preciso cuando se supera el mínimo de 10 ejemplares en la muestra.

Cuando el "coeficiente" vale la unidad y la muestra contiene más de un ejemplar tenemos cierto indeterminismo que nos dice que es muy probable la existencia de más cuños, pero no nos concreta sobre cual es la cantidad más probable.

Cuando el "coeficiente" vale 6 o un número más grande se puede afirmar que practicamente todos los cuños originales se hallan presentes en la

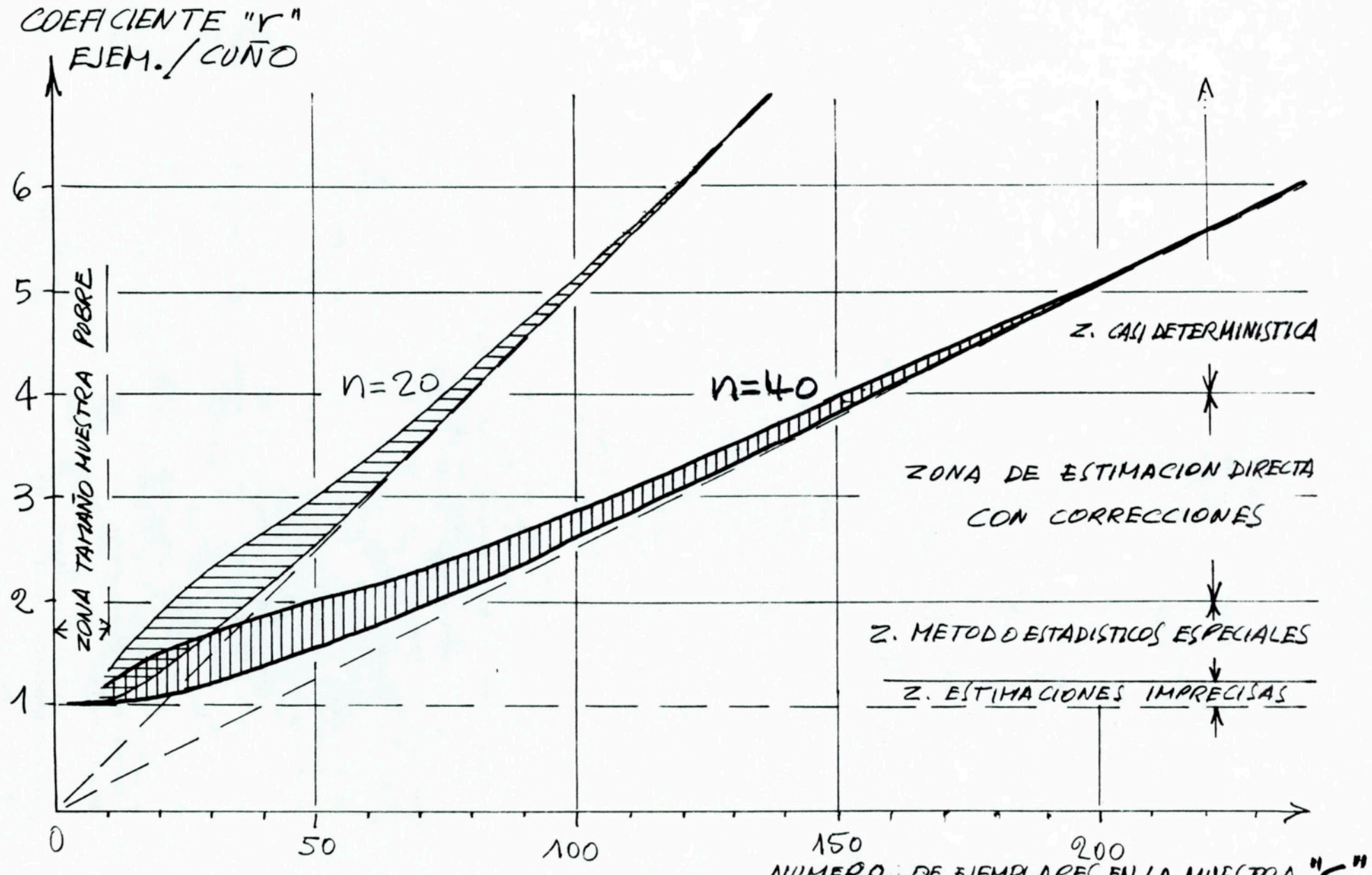

COEFICIENTE "r"
EJEM./CUÑO
6
5
4
3
2
1
0
50
100
150
200
A
n=20
n=40
ZONA TAMAÑO MUESTRA POBRE
Z. CASI DETERMINISTICA
ZONA DE ESTIMACION DIRECTA
CON CORRECCIONES
Z. METODOS ESTADISTICOS ESPECIALES
Z. ESTIMACIONES IMPRECISAS
NUMERO DE EJEMPLARES EN LA MUESTRA, "C"

Figura nº 2

muestra. En el anexo n°3 se expone el razonamiento de esta regla aproximadamente.

La misma regla sirve para determinar el inicio de la significatividad de los resultados de las investigaciones según sea el tamaño de la muestra; en efecto, cuando el número de ejemplares se halla comprendido entre 6 o 10, se inicia la posibilidad apriorística de que el coeficiente varíe entre 1 y 6.

En la figura n°2 se muestra graficamente la variación del "coeficiente" con el volumen de la muestra para dos acuñaciones: 1) n = 20 cuños, y 2) n = 40 cuños; los valores han sido tomados de las correspondientes tablas del anexso n°2 y la discontinuidad de la variación ha sido sustituida por lineas continuas aproximadas. Ambas lineas continuas representan los valores límite, inferior y superior, que como máximo excluye el 5% en cada extremo de los posibles valores más distanciados, por debajo o por encima del respectivo límite. De la observación de la figura resulta lo siguiente:

1) La amplitud de la variación del "coeficiente" según el tamaño de la muestra, determina una zona de aspecto fusiforme; cuando el número de ejemplares de la muestra es del mismo orden de magnitud que el número de cuños originales, la amplitud biene a ser máxima.

2) Cuando el tamaño de la muestra crece, después de duplicar el número de cuños originales, aproximadamente, la zona de variación tiende a convertirse en una linea asintótica a la recta que pasa por el origen, según la ecuación "r = c/n. Cuando el "coeficiente" supera el valor 4 su contenido es practicamente determinístico.

3) Cuando el "coeficiente" se halla comprendido entre 2 y 4, se puede utilizar el mismo para estimar el número original de cuños introduciendo pequeñas modificaciones.

4) Los "coeficientes" comprendidos entre 1,250 y 2,000 son muy imprecisos para que de ellos se hagan deducciones directas para el número original de cuños; en estos casos es necesarios recurrir a procedimientos estadísticos más exhaustivos.

5) Los valores comprendidos entre 1,000 y 1,250 corresponden generalmente a casos de muestras pobres en ejemplares, generalmente con menos de 10 monedas; la problemática de estos casos ya ha sido señalada. Sin embargo, si la muestra rebasa el número de 10 ejemplares, el "coeficiente" nos dice que el número de cuños originales empleados por la ceca fué muy grande.

5. ALGUNAS APLICACIONES ILUSTRATIVAS

Veamos ahora la aplicación de las anteriores reglas para la utilización del "coeficiente ejemplares por cuño" con dos ejemplos concretos. Ambos se refieren a hallazgos de monedas antiguas cuyos datos se hallan en trabajos numismáticos ya publcados.

Primero nos referimos a la publicación "En torno a un hallazgo de denarios de Beligio" (referencia n°2), de donde proceden los datos de la siguiente tabla:

		"c"	"d"	"r"
1.1)	denarios Beligio I , anverso	22	12	1,833
	idem. , reverso	"	11	2,000
1.2)	denarios Beligio II , anverso	55	8	6,875
	idem. , reverso	"	7	7,857
1.3)	denarios Beligio III , anverso	143	8	17,875
	idem. , reverso	"	12	11,917
1.4)	denarios Bolscan I , anverso	4	4	1,000
	idem. , reverso	"	4	1,000
1.5)	denarios Bols. II-III, anverso	9	9	1,000
	idem. , reverso	"	9	1,000
1.6)	den. Bols. III (Granada), anv.	149	63	2,365
	idem. , rev.	"	61	2,443

Las acuñaciones n°s 1,2) y 1,3) muestran valores altos para el coeficiente, lo cual hace suponer que todos los cuños originales se hallan presentes en las muestras.

Por el contrario, las muestras nº 1,4) y 1,5) son de escaso volumen, el valor del coeficiente no puede ser utilizado para hacer previsiones; pero nos dice que el número de cuños originales puede ser muy grande.

De las muestras n°s 1.1) y 1.6) se pueden hacer estimaciones bastante precisa sobre el número original de cuños recurriendo a procedimientos estadísticos apropiados (ref. n°1).

Obsévase como las conclusiones para los hallazgos n°s 1.4) y 1.5) se confirman, en cierta manera, con el hallazgo n°1.6). La ceca Bolscan debió ser más importante que la ceca Beligio.

La segunda aplicación se refiere a unas monedas de bronce ibéricas aparecidas en Azaila (Teruel); los datos han sido extraidos del trabajo "Tesoros de Azaila " (ref. n°3), los cuales se resumen en la siguiente tabla;

ref.	Ceca	"c"	"d"	"r"
2.01)	CELSE	224	55	4,074
2.02)	ILDUCOITE	13	6	2,167
2.03)	ARCEDURGI	23	6	3,833
2,04)	SETEISCEN	48	22	2,182
2,05)	LAGINE	33	21	1,517
2.06)	SALDUIE	32	21	1,424
2.07)	OTOBESCEN	5	3	1,667
2.08)	BELIGIOM	60	47	1,277
2.09)	ILTIRDA	101	74	1,365
2.10)	SECAISA	17	14	1,214
2.11)	OROSI	6	5	1,200
2.12)	BILBILIS	10	9	1,111
2.13)	BOLSCAN	28	26	1,077
2,14)	TERGACOM	1	1	1,000
2.15)	CONTEBACOM	10	6	1,667
2.16)	ALAUN	1	1	1,000

De las acuñaciones 2.14 y 2.16 no se pueden hacer estimaciones alguna sobre el número original de cuños.

En los casos n°s 2.07), y 2.11), 2.12) y 2.15) nos hallamos con escasos números de ejemplares y las previsiones con relacion al número original de cuños son muy vagas. Por ejemplo se puede decir que el valor del coeficiente 1,111 para la ceca BILBILIS significa que el número original de cuños empleados fué muy grande.

Para la ceca BOLSCAN, con ref. n°2.13), con número de ejemplares ya significativo, se puede estimar con más propiedad, con un número elevados de cuños originales, del orden de uno o dos centenares. Similar ocurre con la ref. n°2.10).

Para las acuñaciones n°s 2.05), 2.06), 2.08) y 2.09) se pueden hacer estimaciones bastante precisas sobre el número original de cuños empleados procedimientos estadísticos adecuados; por ejemplo, mediante la simulación estocástica de la formación de las muestras, bajo supuestos previos.

Para los casos n°s 2.01), 2.02), 2,03), y 2.04), con coeficientes comprendidos practicamente entre 2,000 y 4,000, se puede hacer una deducción bastante directa del número original de cuños, considerando que se debe añadir un 10% más sobre el número de los identificados.

* * *

Se da por finalizado este trabajo más propio de un análisis estadístico que de una investigación numismática, pero ha sido enfocado especialmente para que sea de utilidad a tales investigadores. Se hace un ruego a los es-

pecialistas numismáticos para que sepan disculpar las posibles impropiedades técnicas que se puedan haber deslizado. Este trabajo quiere ser una colaboración en el intento de extraer el determinismo de la presentación aleatoria de los acontecimiemtos numismáticos.

Sociedad Española de Investigación,
Estadística e Informática

Barcelona

ANEXO NÚM. 1

PROBABILIDAD DE QUE EN UNA MUESTRA RESULTE UN DETERMINADO VALOR PARA EL COEFICIENTE EJEMPLARES POR CUÑO.

Nomenclatura:

- **n** : número total de cuños originales de la acuñación,
- c : número de ejemplares, monedas, que constituyen la muestra,
- d : número de cuños distintos presentes en la misma muestra,
- r : coeficiente ejemplares por cuño, r(c,d) = c/d,
- $p_n(c/d)$: probabilidad de que se presente el valor c/d para el coeficiente.

La probabilidad del coeficiente "r(c,d)", se puede calcular a partir de las probabilidades de los coeficientes:

"r(c-1,d-1)" y "r(c-1,d)

mediante la fórmula (véase la fig. nº 1 del texto y la referencia nº 1):

$$p_n(c/d) = (1- \frac{d-1}{n}).p_n(\frac{c-1}{d-1}) + (\frac{d}{n}).p_n(\frac{c-1}{d})$$

El vector de probabilidades de la muestra de un solo ejemplar tiene un solo elemento de probabilidad al 100% (los demás elementos son nulos), o sea: $p_n(1/1) = 1$

Con la aplicación iterativa de la fórmula al vector de la muestra de tamaño c=1, se puede calcular la probabilidad de todo valor posible para el coeficiente. Recordamos la siguiente condición: $1 \leq d \leq n$.

Tabla I.- CAMPO DE VARIACION DEL "COEFICIENTE EJEMPLARES POR CUÑO", "r"; NUMERO ORIGINAL DE CUÑOS, n = 5.

C : número de ejemplares de la muestra.

C	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
1	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	2,000
3	1,000	1,500	3,000
4	1,000	1,333	2,000
5	1,250	1,667	2,500
6	1,200	1,500	2,000
7	1,400	1,750	2,333
8	1,600	2,000	2,667
9	1,800	2,250	3,000
10	2,000	2,000	3,333
11	2,200	2,200	2,750
12	2,400	2,400	3,000
13	2,600	2,600	3,250
14	2,800	2,800	3,500
15	3,000	3,000	3,750
16	3,200	3,200	4,000
17	3,400	3,400	4,250
18	3,600	3,600	4,500
19	3,800	3,800	4,750
20	4,000	4,000	5,000
21	4,200	4,200	4,200
22	4,400	4,400	4,400
..	.....	.....	.....

resto:

$r = c/5$

Tabla II.- CAMPO DE VARIACION DEL "COEFICIENTE EJEMPLARES POR CUÑO", "r"; NUMERO ORIGINAL DE CUÑOS, n = 10.

c : número de ejemplares de la muestra.

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}	c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
1	1,000	1,000	1,000	22	2,200	2,444	2,750
2	1,000	1,000	2,000	24	2,400	2,667	3,000
3	1,000	1,000	1,500	26	2,600	2,600	3,250
4	1,000	1,000	2,000	28	2,800	2,800	3,500
5	1,000	1,250	1,667	30	3,000	3,000	3,750
6	1,000	1,200	2,000	35	3,500	3,500	3,889
7	1,000	1,400	1,750	40	4,000	4,000	4,444
8	1,143	1,333	2,000	45	4,500	4,500	5,000
9	1,125	1,500	1,800	50	5,000	5,000	5,556
10	1,250	1,429	2,000	55	5,500	5,500	5,500
12	1,333	1,714	2,000	60	6,000	6,000	6,000
14	1,556	1,750	2,333	..	.....	.....	.....
16	1,600	2,000	2,286	resto:			
18	1,800	2,000	2,571		r = c/10		
20	2,000	2,222	2,857				

Tabla III.- CAMPO DE VARIACION DEL "COEFICIENTE EJEMPLARES POR CUBO", "r"; NUMERO ORIGINAL DE CUBOS, n = 15.

c : número de ejemplares de la muestra.

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
1	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	2,000
3	1,000	1,000	1,500
4	1,000	1,000	1,333
5	1,000	1,000	1,667
6	1,000	1,200	1,500
7	1,000	1,167	1,750
8	1,000	1,333	1,600
9	1,125	1,286	1,800
10	1,111	1,250	1,667
12	1,200	1,500	1,714
14	1,273	1,556	2,000
16	1,333	1,600	2,000
18	1,385	1,636	2,000
20	1,538	1,818	2,222
22	1,571	1,833	2,200
24	1,714	2,000	2,400
26	1,857	2,000	2,364
28	1,867	2,154	2,545
30	2,000	2,308	2,727

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
35	2,333	2,500	2,917
40	2,667	2,857	3,077
45	3,000	3,000	3,462
50	3,333	3,333	4,167
55	3,667	3,667	3,929
60	4,000	4,000	4,286
65	4,333	4,333	4,643
70	4,667	4,667	5,000
75	5,000	5,000	5,357
80	5,333	5,333	5,714
85	5,667	5,667	5,667
90	6,000	6,000	6,000
..	.....	.....	.....

resto:

$$r = c/15$$

Tabla V.- CAMPO DE VARIACION DEL "COEFICIENTE EJEMPLARES POR CUÑO", "r"; NUMERO ORIGINAL DE CUÑOS n = 25 .- -

C : número de ejemplares de la muestra.

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
1	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	1,000
3	1,000	1,000	1,500
4	1,000	1,000	1,333
5	1,000	1,000	1,250
6	1,000	1,000	1,500
7	1,000	1,167	1,400
8	1,000	1,143	1,333
9	1,000	1,125	1,500
10	1,000	1,111	1,429
12	1,091	1,200	1,500
14	1,077	1,273	1,556
16	1,143	1,333	1,600
18	1,200	1,385	1,636
20	1,250	1,429	1,667
22	1,294	1,467	1,833
24	1,333	1,500	1,846
26	1,368	1,625	1,857
28	1,400	1,647	2,000
30	1,500	1,667	2,000
35	1,591	1,842	2,188
40	1,739	2,000	2,222
45	1,957	2,143	2,368
50	2,083	2,273	2,632
55	2,292	2,391	2,750

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
60	2,400	2,609	2,857
65	2,600	2,826	3,095
70	2,800	2,917	3,182
75	3,000	3,125	3,409
80	3,200	3,333	3,636
85	3,400	3,400	3,696
90	3,600	3,600	3,913
95	3,800	3,800	4,130
100	4,000	4,000	4,348
110	4,400	4,400	4,583
120	4,800	4,800	5,000
130	5,200	5,200	5,417
140	5,600	5,600	5,833
150	6,000	6,000	6,250
160	6,400	6,400	6,400
..	.....	.....	.....

resto: r = c/25

Tabla IV.- CAMPO DE VARIACION DEL "COEFICIENTE EJEMPLARES POR CUÑO", "r"; NUMERO ORIGINAL DE CUÑOS, n = 20. - - -

c : número de ejemplares de la muestra.

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
1	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	1,000
3	1,000	1,000	1,500
4	1,000	1,000	1,333
5	1,000	1,000	1,667
6	1,000	1,200	1,500
7	1,000	1,167	1,400
8	1,000	1,143	1,600
9	1,000	1,125	1,500
10	1,000	1,250	1,667
12	1,091	1,333	1,714
14	1,167	1,400	1,750
16	1,231	1,455	1,778
18	1,286	1,500	1,800
20	1,333	1,538	1,818
22	1,375	1,571	2,000
24	1,500	1,714	2,000
26	1,529	1,733	2,167
28	1,556	1,867	2,157
30	1,667	1,875	2,308

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
35	1,842	2,059	2,500
40	2,105	2,222	2,667
45	2,250	2,500	2,813
50	2,500	2,632	2,941
55	2,750	2,895	3,235
60	3,000	3,158	3,333
65	3,250	3,250	3,611
70	3,500	3,500	3,889
75	3,750	3,750	4,167
80	4,000	4,000	4,211
85	4,250	4,250	4,474
90	4,500	4,500	4,737
95	4,750	4,750	5,000
100	5,000	5,000	5,263
105	5,250	5,250	5,526
110	5,500	5,500	5,789
115	5,750	5,750	6,053
120	6,000	6,000	6,000
..	.....	.....	.....
resto :	r = c/20		

Tabla VI.- CAMPO DE VARIACION DEL "COEFICIENTE EJEMPLARES POR CUÑO", "r"; numero original de cuños n = 30. - - - -

c : número de ejemplares de la muestra

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
1	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	1,000
3	1,000	1,000	1,500
4	1,000	1,000	1,333
5	1,000	1,000	1,250
6	1,000	1,000	1,500
7	1,000	1,000	1,400
8	1,000	1,143	1,333
9	1,000	1,125	1,500
10	1,000	1,111	1,429
12	1,000	1,200	1,500
14	1,077	1,273	1,556
16	1,067	1,231	1,600
18	1,125	1,286	1,636
20	1,176	1,333	1,667
22	1,222	1,375	1,692
24	1,263	1,412	1,714
26	1,300	1,444	1,733
28	1,333	1,556	1,750
30	1,364	1,579	1,875
35	1,458	1,667	1,944
40	1,600	1,818	2,105
45	1,731	1,875	2,143
50	1,852	2,000	2,273
55	1,964	2,200	2,391
60	2,143	2,308	2,609
65	2,241	2,321	2,708
70	2,414	2,500	2,800
75	2,500	2,679	3,000
80	2,667	2,857	3,077
85	2,833	2,931	3,269
90	3,000	3,103	3,333
95	3,167	3,276	3,519
100	3,333	3,448	3,704
110	3,667	3,667	3,929
120	4,000	4,000	4,286
130	4,333	4,333	4,483
140	4,667	4,667	4,828
150	5,000	5,000	5,172
160	5,333	5,333	5,517
170	5,667	5,667	5,862
180	6,000	6,000	6,207
190	6,333	6,333	6,333
..	.....	.....	.....

resto: r = c/30

Tabla VII.- CAMPO DE VARIACION DEL "COEFICIENTE EJEMPLARES POR CUÑO", "r"; NUMERO ORIGINAL DE CUÑOS n = 40. - - - -

c : número de ejemplares de la muestra

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
1	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	1,000
3	1,000	1,000	1,500
4	1,000	1,000	1,333
5	1,000	1,000	1,250
6	1,000	1,000	1,200
7	1,000	1,000	1,400
8	1,000	1,000	1,333
9	1,000	1,125	1,286
10	1,000	1,111	1,429
12	1,000	1,091	1,333
14	1,000	1,167	1,400
16	1,067	1,231	1,455
18	1,059	1,200	1,500
20	1,111	1,250	1,538
22	1,100	1,294	1,467
24	1,143	1,333	1,500
26	1,182	1,368	1,625
28	1,217	1,400	1,647
30	1,250	1,429	1,667
35	1,296	1,459	1,750
40	1,373	1,600	1,818
45	1,500	1,667	1,875
50	1,563	1,724	2,000
55	1,667	1,833	2,037
60	1,765	1,935	2,143
65	1,857	2,031	2,241
70	1,944	2,121	2,333
75	2,027	2,206	2,419
80	2,105	2,286	2,500

c	r_{inf}	r_{max}	r_{sup}
85	2,237	2,361	2,656
90	2,368	2,500	2,727
95	2,436	2,568	2,794
100	2,564	2,703	2,941
110	2,750	2,895	3,143
120	3,000	3,158	3,333
130	3,250	3,333	3,514
140	3,500	3,590	3,784
150	3,750	3,846	4,054
160	4,000	4,000	4,211
170	4,250	4,250	4,474
180	4,500	4,500	4,737
190	4,750	4,750	4,872
200	5,000	5,000	5,128
210	5,250	5,250	5,385
220	5,500	5,500	5,641
230	5,750	5,750	5,897
240	6,000	6,000	6,154
250	6,250	6,250	6,410
260	6,500	6,500	6,667
270	6,750	6,750	6,750
..	.....	.....	.....

resto: r = c/40

VALOR LIMITE INFERIOR DEL "COEFICIENTE" PARA ESTIMAR QUE TODOS LOS CUÑOS SE HALLAN PRESENTES EN LA MUESTRA.

Nomenclatura:

- n : número original de cuños en la acuñación,
- c : número de ejemplares (monedas) en la muestra,
- d : número de cuños distintos presentes en la muestra,
- r : coeficiente ejemplares por cuña, r = c/d.

Probabilidad de que un cuño concreto de la acuñación no se halle presente ni una sóla vez en el lote de c monedas:

$$P_{c,1}(\text{1-ausente}) = (1 - \frac{1}{n})^c$$

Probabilidad de que uno cualquiera de los cuños de la acuñación quede ausente en la muestra; es la suma de la anterior probabilidad considerando todos los cuños:

$$P_{c,n}(\text{1-ausente}) = (1 - \frac{1}{n})^c \cdot n$$

Para establecer un límite inferior de presencia de todos los cuños consideramos que la anterior probabilidad es inferior al 5%; lo cual será el error máximo que podemos cometer en nuestra afirmación:

$$n \cdot (1 - \frac{1}{n})^c \leqslant 0{,}05$$

o bien:

$$(1 - \frac{1}{n})^{d \cdot r} \leqslant 0{,}05/n$$

En los casos que nos afecta el número d tiende a acercarse al valor n por lo que se puede efectuar la siguiente sustitución:

$$(1 - \frac{1}{n})^{n \cdot r} \leqslant 0{,}05/n$$

o bien:

$$r \cdot \log_e(1 - \frac{1}{n})^n \leq \log_e(0{,}05/n)$$

de donde, con suficiente aproximación, resulta:

$$-r \leq \log_e(0{,}05/n)$$

o bien:

$$r \geq 3{,}00 + \log_e(n)$$

Para tamaños de acuñación de 5 a 100 cuños originales por acuñación, el valor límite inferior para el coeficiente resulta según la tabla:

n	r	n	r
5	4,61	40	6,69
10	5,30	60	7,09
20	6,00	100	7,61

Para el ámbito de las investigaciones que se desarrollen sobre tesorillos de monedas antiguas, donde el número de cuños es relativamente limitado, se puede considerar que cuando el "coeficiente ejemplares por cuño" alcanza el valor 6 practicamente todos los cuños originales se hallan presentes en la muestra:

$$r_{\text{límite inferior presencia cuños}} = 6$$

De esta regla se desprende que las investigaciones estadísticas son más consistentes cuando el tamaño de la muestra da la oportunidad apriorística de que el valor del "coeficiente" varie desde 1, como mínimo, hasta 6, por lo menos; lo cual ocurre cuando el volumen de la muestra rebasa la zona de 6 a 10 ejemplares.

Referencias:

1. MORA MAS, F-J., "Estimación del número de cuños que se emplearon en una acuñación, según el número de cuños distintos aparecidos en los hallazgos de monedas antiguas", Acta Numismatica, 1977, VII, pp. 13-28.

2. VILLARONGA, L., "En torno a un hallazgo de denarios de Beligio", 'Ampurias', 1968, tomo XXX, pp. 225 - 236.

3. VILLARONGA, L., "Los Tesoros de Azaila y la circulación monetaria en el valle del Ebro", Barcelona, 1977.

Notas:

1. Los cálculos de las probabilidades para las tablas del anexo n°2 han sido realizados mediante calculadora programable "Hewlett-Packard-67", con programa preparado exprofeso para esta comunicación.